Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2019/2020**
M1 Théorie de Galois **Maria Chlouveraki**

Correspondance galoisienne et polynômes cyclotomiques - TD 10

1. Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$ est un groupe cyclique d'ordre n engendré par l'automorphisme de Frobenius $\varphi : \mathbb{F}_{p^n} \to \mathbb{F}_{p^n}$, $a \mapsto a^p$.

2. Trouver tous les sous-corps de $\mathbb{F}_{128}$.

3. Calculer $\Phi_n(x)$ pour $n = 5, \ldots, 12$.

4. Si p est un nombre premier, alors $\Phi_p(x) = \sum_{i=0}^{p-1} x^i$.

5. Si $n > 1$ est un nombre impair, alors $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.

6. Si $n = p^m$ où p est un nombre premier, alors $\Phi_n(x) = \Phi_p(x^{p^{m-1}}) = \sum_{i=0}^{p-1} x^{ip^{m-1}}$.

7. Si $n = p^m r$ où p est un nombre premier et $\mathrm{pgcd}(p, r) = 1$, alors $\Phi_n(x) = \Phi_{pr}(x^{p^{m-1}})$.